Correction Devoir maison n°15

Exercice 1 - Probabilités

Les parties sont toutes indépendantes

Un joueur joue au jeu TETRIS et passe les niveaux 1, 2, ..., n, ... jusqu'à ce qu'il échoue. Il a une probabilité $\frac{1}{n}$ de réussir le jeu de niveau n. Soit X le numéro du dernier niveau réussi. (Il finit toujours par échouer et la réussite des niveaux sont indépendants).

1. On a

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

On note les évènements A_n : "Le joueur passe le niveau n. On a donc $P(A_n) = \frac{1}{n}$. On a alors

$$(X = k) = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}$$

Les évènements étant mutuellement indépendants, on a

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_k) \times P(\overline{A_{k+1}}) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \ldots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\boxed{P(X = k) = \frac{k}{(k+1)!}.}$$

On étudie les sommes

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} P(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \end{aligned}$$

On reconnait une somme télescopique. On peut donc conclure que la série converge et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \frac{1}{1!} - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 1.}$$

2. On étudie la série $\sum_{k\geq 1} kP(X=k)$ en passant par les sommes partielles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{k}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{(k+1-1)}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{k}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}\end{aligned}$$

Or, on sait que les séries $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ (série exponentielle) et $\sum_{k\geq 1} \frac{k}{(k+1)!}$ sont convergentes. L'espérance existe et

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = e-1}$$

On va calculer $E((X+1)(X-1))$ en utilisant la formule de transfert

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-1)P(X=k) &= \sum_{k=1}^{n}(k-1)(k+1)\frac{k}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)k(k+1)}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!}\\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}\end{aligned}$$

La série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ est convergente et donc

$$E((X-1)(X+1)) = E(X^2-1) = e \Longleftrightarrow E(X^2) = e+1$$

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = e+1-(e-1)^2 = 3e-e^2.}$$

Partie II

Un établissement bancaire comporte 5 guichets numérotés de 1 à 5. Le nombre N de personnes arrivant à la banque en une journée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les clients choisissent leur guichet au hasard, indépendamment les uns des autres. On note X le nombre de clients arrivant au guichet n°3 en une journée.

1. N suit une loi de Poisson de paramètre λ donc

$$\boxed{E(N) = \lambda.}$$

Le paramètre λ correspond à la moyenne des clients fréquentant la banque en une journée.

2. Sachant $N = n$, la VA X suit une loi binomiale puisque l'on compte le nombre de succès d'une répétition d'épreuve de Bernoulli. On a donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n]\!], P_{(N=n)}(X_1 = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}}$$

Nous avons enfin,

$$\boxed{\forall k > n, P_{(N=n)}(X_1 = k) = 0}$$

3. En utilisant le système complet d'évènement associé à N et la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) \times P_{N=n}(X_1 = k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{5}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1}{5}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1}{5}\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{n!} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \left(\frac{1}{5}\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{4}{5}\lambda\right)^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \left(\frac{1}{5}\right)^k e^{\frac{4\lambda}{5}}
\end{aligned}$$

C'est à dire ,

$$\boxed{P(X = k) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{5}}\left(\frac{\lambda}{5}\right)^k}{k!}}$$

4. La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{5}$.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\frac{\lambda}{5}\right)}$$

On en déduit que

$$\boxed{E(X) = \frac{\lambda}{5} \text{ et } V(X) = \frac{\lambda}{5}}$$

Exercice 2 - EML 2018

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

1. **a.** Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, P_i l'événement : « Obtenir pile au i-ème lancer » et $F_i = \overline{P_i}$. On a alors

$$\begin{aligned}
&(X=0) = P_1 \cap P_2\\
&(X=1) = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)\\
&(X=2) = (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4).
\end{aligned}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$-ème lancer et le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. On obtient donc

$$\boxed{\begin{cases} P(X=0) &= \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9},\\[2ex] P(X=1) &= 2 \times \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{27},\\[2ex] P(X=2) &= 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{27}. \end{cases}}$$

b. Comme observé à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$-ème lancer, le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. Formellement :

$$(X = n) = \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \left(P_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} F_j\right)\right)\right] \cap P_{n+2}.$$

Par incompatibilité et par indépendance des lancers, il vient

$$\begin{aligned}
P(X = n) &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \frac{2}{3}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}}\\
&= (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.}$$

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

2. **a.** U prend clairement des valeurs entières positives et, pour chaque entier n, il existe une suite de tirages amenant à n Face et 2 Pile suivi d'un tirage de la boule numérotée n. Autrement dit,

$$\boxed{U(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $(X = n)$, l'urne est composée de $(n+1)$ boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à n donc

$$\boxed{U^{(X=n)} \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, n \rrbracket).}$$

c. Soit $k \in \mathbb{N}$. On commence par observer que $(U = k) \cap (X = n) = \emptyset$ si $n < k$ car on ne peut pas tirer une boule numérotée k dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à n si $k > n$. Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $\left\{(X = n)_{n \in \mathbb{N}}\right\}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(U = k \cap X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P(U = k \cap X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(X=n)}(U = k) P(X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) \quad \text{(d'après } \mathbf{2.b}\text{)},
\end{aligned}$$

ce qui établit la première égalité.

En injectant le résultat trouvé en **1.b**, il vient

$$\begin{aligned}
P(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} \\
&= 4 \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} \\
&= 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k+2}} \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1 - 1/3} \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.}$$

d. U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} k P(U = k)$ converge absolument. Les valeurs prises par U étant positives, ceci équivaut à la convergence de la série. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} kP(U=k) &= \sum_{k\geq 0} k\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \sum_{k\geq 1} k\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \frac{2}{9}\sum_{k\geq 1} k\frac{1}{3^{k-1}}\\ &= \frac{2}{9}\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison $1/3$. La série converge donc et alors

$$\begin{aligned}E(U) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U=k)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{3^{k-1}}\\ &= \frac{2}{9}\times\frac{1}{(1-1/3)^2}\\ &= \frac{2}{9}\times\frac{9}{4}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E(U) = \frac{1}{2}.}$$

Pour déterminer la variance, on commence par étudier l'espérance de $U(U-1)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} k(k-1)PU=k &= \sum_{k\geq 2} k(k-1)\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \frac{2}{27}\sum_{k\geq 2} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.\end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois de raison $1/3$, il s'agit donc d'une série convergente, et plus précisément absolument convergente puisque ses termes sont positifs. Il suit donc du théorème de transfert que $U(U-1)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}E(U(U-1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(U=k)\\ &= \frac{2}{27}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\\ &= \frac{2}{27}\times\frac{2}{(1-1/3)^3}\\ &= \frac{2}{27}\times\frac{2\times 27}{8}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Mais alors $U^2 = U^2 - U + U = U(U-1) + U$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et

$$E(U^2) = E(U(U-1)) + E(U) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que :

$$\boxed{V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.}$$

3. **a.** V prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un tirage amenant à n Face et deux Pile suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas $(V = n)$ est réalisé. Ainsi,

$$\boxed{V(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $V^{(X=n)}$ prend ses valeurs entre 0 et n et, pour tout $k \in \iint 0n$, on a

$$\begin{aligned}P_{(X=n)}(V=k) &= P_{(X=n)}(X-U=k)\\ &= P_{(X=n)}(U=n-k)\\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{V^{(X=n)} \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, n\rrbracket).}$$

c. En reprenant les calculs effectués en **2.b**, on observe que la loi de V est la même que celle de U. Autrement dit,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(V=k) = \frac{2}{3^{k+1}}.}$$

Partie III : Étude d'un jeu

1. Simulation informatique

a. On propose la fonction suivante :

```
function x = simule_X()
    nPile = 0
    nFace = 0
    while (nPile<2)
        if (rand()<2/3)
            nPile = nPile +1
        else
            nFace = nFace +1
        end
    end
    x = nFace
endfunction
```

b. La fonction proposée dans l'énoncé calcule la fréquence, sur 10 000 simulations, des victoires de A.

c. On observe que pour $p \approx 0,8$, on obtient une fréquence de victoires de A approximativement égale à 50%. Ainsi :

$$\boxed{\text{Le jeu est équilibré pour } p \approx 0,8.}$$

2. Étude de la variable aléatoire Y

a. Z compte le rang du premier succès (« obtenir Pile ») dans une suite indéfinie de répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer la pièce), de même paramètre (p, la probabilité de faire Pile). Ainsi,

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathscr{G}(p).}$$

b. Y étant le nombre de Face obtenus jusqu'au premier Pile, on a la relation $Y = Z - 1$. Il s'ensuit que Y admet une espérance et une variance et que

$$\boxed{E(Y) = E(Z-1) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}}$$

et

$$\boxed{V(Y) = V(Z-1) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.}$$

c. Posons $q = 1 - p$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(Y \geq n) &= P(Z - 1 \geq n) \\
&= P(Z \geq n + 1) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Z = k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} \\
&= pq^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-(n+1)} \\
&= pq^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\
&= pq^n \times \frac{1}{1-q} \\
&= q^n.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y \geq n) = (1-p)^n.}$$

3. a. En appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned}
P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n \cap X \leq Y) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n \cap Y \geq n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(Y \geq n) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes).}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(Y \geq n).}$$

b. En injectant les résultats établis en **1.b** et **7.c** dans la formule trouvée en **8.a**, on a :

$$\begin{aligned}
P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y \geq n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{4}{3^{n+2}} q^n \\
&= \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\left(\frac{q}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4}{9} \times \frac{1}{(1-q/3)^2} \\
&= \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{3-q}\right)^2 \\
&= \frac{4}{(3-q)^2} \\
&= \frac{4}{(2+p)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{P(X \leq Y) = \frac{4}{(2+p)^2}.}$$

c. Le jeu est équilibré quand $P(X \leq Y) = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire quand $\dfrac{4}{(2+p)^2} = \dfrac{1}{2}$. Or

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \\
&\Leftrightarrow p^2 + 4p - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow p \text{ est racine de } X^2 + 4X - 4 \\
&\Leftrightarrow p \in \left\{-2-2\sqrt{2},\ -2+2\sqrt{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Mais $-2-2\sqrt{2} < 0$ et $-2+2\sqrt{2} > 0$ et p est nécessairement positif. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le jeu est équitable pour } p = 2\sqrt{2}-2.}$$

Remarque : On a $\sqrt{2} \approx 1,41$ donc $2\sqrt{2}-2 \approx 0,82$, ce qui est cohérent avec la réponse déterminée numériquement à la question **6.c**.